Ampliación Tema 3: Múltiplo y divisores

- Múltiplo. Divisible. Divisor

56 | 8	56 es divisible por 8	
0 7	56 es múltiplo de 8	Para indicar que 56 es múltiplo de 8 se escribe sobre el divisor 8 un punto : $(\dot{8})$ = 56
	8 es divisor de 56	y se lee múltiplo de 8 es 56.

El 56 se dice que es divisible por 8, y 8 es divisor de 56 porque la **división es exacta**.
También se dice que 56 es múltiplo de 8 porque 8 X 7 = 56

- Criterios de Divisibilidad

- **Divisibilidad por 2**

Un número es divisible por dos si acaba en cero o en cifra par.

Ej.: 32 Es divisible por 2 porque termina en cifra par.
Ej.: 60 Es divisible por 2 porque termina en cero.
Ej.: 47 No es divisible por 2 porque no termina en cero ni en cifra par.

- **Divisibilidad por 3**

Un número es divisible por tres cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 3.

Ej.: 15 Es divisible por 3 porque, 1 + 5 = 6 el 6 = $(\dot{3})$ la suma de sus cifras es múltiplo de 3.
Ej.: 37 No es divisible por 3 porque, 3 + 7 = 10 el 10 ≠ $(\dot{3})$ la suma de sus cifras no es múltiplo de 3.

- Divisibilidad por 4

Un número es divisible por cuatro cuando las dos últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de 4.

Ej.: 300 Es divisible por 4 porque las dos últimas cifras son ceros.
Ej.: 224 Es divisible por 4 porque 24 = $(\dot{4})$ las dos últimas cifras forman un múltiplo de 4.
Ej.: 370 No es divisible por 4 porque, las dos últimas cifras no son ceros ni forman un múltiplo de 4.

- **Divisibilidad por 5**

Un número es divisible por cinco si acaba en cero o en cinco.

Ej.: 70 Es divisible por 5 porque termina en cero.
Ej.: 185 Es divisible por 5 porque termina en 5.
Ej.: 214 No es divisible por 5 porque no termina ni cero ni en 5.

- Divisibilidad por 6

Un número es divisible por seis si es divisible por dos y tres al mismo tiempo.

Ej.: 72 Es divisible por 6 porque es divisible por 2 (termina en cifra par) y es divisible por 3 (7 + 2 = 9 el 9 = $(\dot{3})$ la suma de sus cifras es múltiplo de 3).
Ej.: 254 No es divisible por 6 porque aunque es divisible por 2 (termina en cifra par) no es divisible por 3 porque, 2 + 5 + 4 = 11 el 11 ≠ $(\dot{3})$ la suma de sus cifras no es múltiplo de 3.

- ## Divisibilidad por 7

Un número es divisible por 7 cuando restando sucesivamente de sus decenas el doble de sus unidades, se obtiene como residuo cero o un múltiplo de 7.

Ej.: 18724 No es divisible por 7 porque restando sucesivamente de sus decenas el doble de sus unidades, no se obtiene como residuo cero o un múltiplo de 7.

1 8 7 2 **4**	1 8 6 **4**	1 **7 8**
- 8	**- 8**	**- 1 6**
1 8 6 **4**	1 7 **8**	1 1

Ej.: 1652 Es divisible por 7 porque restando sucesivamente de sus decenas el doble de sus unidades, se obtiene como residuo cero o un múltiplo de 7.

1 6 5 **2**	1 6 **1**	
- 4	**- 2**	
1 6 **1**	1 **4**	$14 = \dot{(7)}$

- ## Divisibilidad por 8

Un número es divisible por ocho cuando las tres últimas cifras son ceros o forman un múltiplo de 8.

Ej.: 7000 Es divisible por 8 porque las tres últimas cifras son ceros.
Ej.: 2120 Es divisible por 8 porque $120 = \dot{(8)}$ las tres últimas cifras forman un múltiplo de 8.
Ej.: 4290 No es divisible por 8 porque, las tres últimas cifras no son ceros ni forman un múltiplo de 8.

Divisibilidad por 9

Un número es divisible por nueve cuando la suma de sus cifras es múltiplo de 9.

Ej.: 27 Es divisible por 9 porque, $2 + 7 = 9$ el $9 = \dot{(9)}$ la suma de sus cifras es múltiplo de 9.
Ej.: 415 No es divisible por 9 porque, $4 + 1 + 5 = 10$ el $10 \neq \dot{(9)}$ la suma de sus cifras no es múltiplo de 9.

Divisibilidad por 10

Un número es divisible por diez si acaba en cero.

Ej.: 80 Es divisible por 10 porque termina en cero.
Ej.: 93 No es divisible por 10 porque no termina en cero.

Divisibilidad por 11

Un número es divisible por 11 cuando la diferencia, de la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar, es cero o múltiplo de 11.

Ej.: 2332 Es divisible por 11 porque la diferencia, de la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar, es cero.

2 3 3 2

$5 - 5 = 0$

Ej.: 7150 Es divisible por 11 porque la diferencia, de la suma de las cifras de lugar par y la suma de las cifras de lugar impar, es múltiplo de 11.

7 1 5 0

$12 - 1 = 11$

Múltiplos de un número
Los múltiplos de un número se obtienen multiplicando dicho número por los número naturales.

$(\dot{4}) = \{0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, \ldots\}$

- Todo número es múltiplo de sí mismo.
- El cero es múltiplo de cualquier número natural.

$(\dot{3}) = \{\mathbf{0}, \mathbf{3}, 6, 9, 12, 15, 18, \ldots\}$

Mínimo común múltiplo (m.c.m.)
El mínimo común múltiplo de dos o más números es el menor múltiplo común, distinto de cero.

$(\dot{5}) = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, \mathbf{30}, 35, \ldots\}$

$(\dot{6}) = \{0, 6, 12, 18, 24, \mathbf{30}, 36, \ldots\}$

m.c.m. (5, 6) = 30

Divisores de un número
Un número a es divisor de b si la división de b entre a es una división exacta.

$$\begin{array}{l|l} b & a \\ \hline 0 & \text{Exacta} \end{array}$$

D (24) = {1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}

24 : **1** = 24 exacta	24 : **2** = 12 exacta	24 : **3** = 8 exacta
24 : **4** = 6 exacta	24 : 5 = 4 inexacta R= 4	24 : **6** = 4 exacta
24 : 7 = 3 inexacta R =3	24 : **8** = 3 exacta	24 : 9 = 2 inexacta R=6
24 : 10 = 2 inexacta R =4	24 : 11 = 2 inexacta R =2	24 : **12** = 2 exacta
24 : 13 = 1 inexacta R =11	24 : 14 = 1 inexacta R =10	24 : 15 = 1 inexacta R =9
24 : 16 = 1 inexacta R =8	24 : 17 = 1 inexacta R =7	24 : 18 = 1 inexacta R =6
24 : 19 = 1 inexacta R =5	24 : 20 = 1 inexacta R =4	24 : 21 = 1 inexacta R =3
24 : 22 = 1 inexacta R =2	24 : 23 = 1 inexacta R =1	24 : **24** = 1 exacta

- Todo número tiene como mínimo dos divisores el 1 y el mismo.

Máximo común divisor (M.C.D.)
El máximo común divisor de dos o más números es el mayor divisor común.

D (12) = {1, 2, 3, **4**, 6, 12}

D (20) = {1, 2, **4**, 5, 10, 20}

M.C.M. (12, 20) = 4

Número Primo
Un número es primo si sólo tiene dos divisores, el 1 y el mismo.
D (13) = {1, 13}   13 es primo

Número compuesto
Un número es compuesto si tiene más de dos divisores.
D (14) = {1, 2, 7, 14}   14 es compuesto

Factores de un número

Los números se pueden escribir como producto de números más pequeños a los que se llaman **factores.**

Ej.: 10 = 5 X 2 son factores

Ej.: 20 = 5 X 2 X 2 son factores

Todo número **compuesto** se puede expresar como un producto de factores **primos.**

Al proceso de escribir como producto de números primos otro número mayor se llama **factorización.**

Descomposición factorial o factorización.

Para descomponer en factores se comienza por los números primos más pequeños.

Este es el orden: 2, 3, 5, 7, 11, …

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 84 \,\lfloor\, \mathbf{2} \\ 04 \quad 42 \,\lfloor\, \mathbf{2} \\ \;\;0 \quad 02 \quad 21 \,\lfloor\, \mathbf{3} \\ \qquad\quad 0 \quad 0 \quad 7 \,\lfloor\, \mathbf{7} \\ \qquad\qquad\qquad\quad 0 \quad \mathbf{1} \end{array}$$

$84 = 2 \text{ X } 2 \text{ X } 3 \text{ X } 7 = 2^2 \text{ X } 3 \text{ X } 7$

$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 75 \,\lfloor\, \mathbf{3} \\ 15 \quad 25 \,\lfloor\, \mathbf{5} \\ \;\;0 \quad\; 0 \quad 5 \,\lfloor\, \mathbf{5} \\ \qquad\qquad 0 \quad \mathbf{1} \end{array}$$

$75 = 3 \text{ X } 5 \text{ X } 5 = 3 \text{ X } 5^2$

$84 = 3 \cdot 5 \cdot 5 = 3 \cdot 5^2$

Máximo común divisor (M.C.D.)

Para calcular el M.C.D.de dos números:

1º- Se descomponen ambos números en producto de factores primos.

2º- El M.C.D. es igual al producto de los factores primos **comunes** que estén elevados **al menor exponente .**

Ej.: Calcula M.C.D.de (4 y 6)

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$4 = 2 \cdot 2 = \mathbf{2^2}$

$6 = \mathbf{2} \cdot 3$

los factores comunes son 2^2 y 2, y de ellos el de menor exponente es 2.

Por tanto M.C.D.de (4 y 6) = 2

Ej.: Calcula M.C.D.de (24 y 180)

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ & \end{array}$$

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = \mathbf{2^3} \cdot \mathbf{3}$

$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = \mathbf{2^2} \cdot \mathbf{3^2} \cdot 5$

los factores comunes son 2^3 y 2^2, 3 y 3^2 y de ellos los de menor exponente es $\mathbf{2^2 \cdot 3}$

Por tanto M.C.D.de (24 y 180) = $\mathbf{2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3 = 12}$

Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

Para calcular el m.c.m. de dos números:

1º- Se descomponen ambos números en producto de factores primos.

2º- El m.c.m. es igual al producto de los factores primos **comunes y no comunes** que estén elevados **al mayor exponente.**

Ej.: Calcula m.c.m.de (36 y 40)

$$\begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = \mathbf{2^2 \cdot 3^2}$

$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = \mathbf{2^3 \cdot 5}$

los factores comunes son 2^2 y 2^3, y de entre ellos elijo el de mayor exponente es 2^3, y los factores no comunes que son 3^2 y el 5.

Por tanto M.C.D.de (36 y 40) = $\mathbf{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 72 \cdot 5 = 360}$